2021-2022 Öğretim yılı Fonksiyonel Analiz Dersi Arasınav Soruları

1- (a) $\mathbb{R}^2$ de $p=(2,1)$ noktası ve $S=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$ kümesi $d(p,S)$ uzaklığını bulunuz.

(b) $S\neq\emptyset$ olmak üzere üstten sınırlı olan $S\subset\mathbb{R}$ için $d(\sup S, S)=0$ olduğunu gösteriniz.

2. (X,d) bir metrik uzay, $p\in X$, $q\in X$ ve $S\neq\emptyset$, $S\subset X$ olsun.

$$d(p,S)\leq d(p,q)+d(q,S)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

3. (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$, $B\subset X$ olsun. Aşağıdaki özellikleri ispatlayınız:

(a) $X\setminus\overline{A}=(X\setminus A)^{\circ}$, (b) A açık $\Leftrightarrow \partial A\subset X\setminus A$.

4. (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ ve $p\in A'$ olsun. Her bir $B(p,\varepsilon)$ açık yuvarının A kümesinin sonsuz çoklukta elemanını içerdiğini gösteriniz.

5. (X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay ve $f: X\to Y$ bire-bir, örten fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y))$$

ise f nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

6. (X,d_1), (Y,d_2) metrik uzaylar ise $Z=X\times Y$ üzerinde $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)\in Z$ için

$$m(z_1,z_2)=\sqrt{(d_1(x_1,x_2))^2+(d_2(y_1,y_2))^2}$$

fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz ve

$$z_n=(x_n,y_n)\xrightarrow{m} z=(x,y)\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{d_1}x \text{ ve } y_n\xrightarrow{d_2}y$$

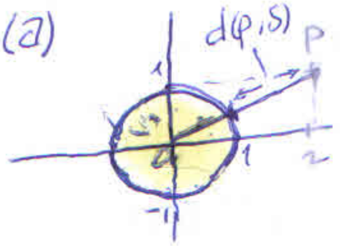
olduğunu ispatlayınız.

18.04.2022

Not: Süre 100 dakikadır....

Çözumler

1- (a)



$$d(p,S)=\inf\{d(p,x) \mid x\in S\}$$
$$=d(p,0)-1=\sqrt{(2)^2+(1)^2}-1=\underline{\underline{\sqrt{5}-1}}.$$

(b) $S\neq\emptyset$, $S\subset\mathbb{R}$, $b=\sup S<\infty$ verilmiş.
Supremumun karakteristik özelliği gereğince

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists a_\varepsilon\in S \ni b\geq a_\varepsilon>b-\varepsilon$$

yazılır.
Dolayısıyla $b-a_\varepsilon=\sup S-a_\varepsilon<\varepsilon$ ve

$$0\leq d(b,S)=\inf\{d(b,x) \mid x\in S\}$$
$$=\inf\{|b-x| : x\in S\}\leq b-a_\varepsilon<\varepsilon$$

olur.
Yani $\forall\varepsilon>0$ için $0\leq d(b,S)<\varepsilon$ ve bundan dolayı

$$d(b,S)=d(\sup S,S)=0$$

bulunur.

2- (X,d) metrik uzay, $p\in X$, $q\in X$ ve $S\neq\emptyset$, $S\subset X$ verilmiş.

$$d(p,S)=\inf_{x\in S} d(p,x)\leq\inf_{x\in S}\left(d(p,q)+d(q,x)\right)$$
$$=d(p,q)+\inf_{x\in S} d(q,x)=d(p,q)=d(q,S).$$

3- (X,d) metrik uzay, $A\subset X$ ve $B\subset X$ verilmiş.

(a) $x\in X\setminus\bar{A} \Rightarrow \bar{A}$ kapalı, dolayısıyla $X\setminus\bar{A}$ açık olduğundan $\exists\varepsilon>0 \ni B(x,\varepsilon)\subset X\setminus\bar{A}$

$\Rightarrow A\subset\bar{A}$ olduğundan, $B(x,\varepsilon)\subset X\setminus\bar{A}\subset X\setminus A$

$\Rightarrow x\in(X\setminus A)^\circ$

$\Rightarrow X\setminus\bar{A}\subset(X\setminus A)^\circ$

(i)

olur.

$$x\in (X\setminus A)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon>0 \ni B(x,\varepsilon)\subset X\setminus A$$

$$\Rightarrow X\setminus B(x,\varepsilon)\supset A$$

$\Rightarrow X\setminus B(x,\varepsilon)$ kapalı olduğundan

$$\bar{A}\subset X\setminus B(x,\varepsilon)$$

$\Rightarrow x\notin \bar{A}$, yani $x\in X\setminus \bar{A}$

$$\Rightarrow (X\setminus A)^\circ \subset X\setminus \bar{A}, \qquad (ii)$$

sonuç olarak (i) ve (ii) de $(X\setminus A)^\circ = X\setminus \bar{A}$ olur.

4- (X,d) metrik uzay, $A\subset X$ ve $p\in A'$ verilmiş.

$p\in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ (B(p,\varepsilon)\setminus\{p\})\cap A\neq\emptyset$ idi.

Bir $\varepsilon_0>0$ için $(B(p,\varepsilon_0)\setminus\{p\})\cap A$ sonlu varsayalım.

$(B(p,\varepsilon)\setminus\{p\})\cap A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ olsun.

Her $i=1,2,\dots,n$ için $d(p,a_i)<\varepsilon_0$ dır. Eğer

$$\eta=\min\{d(p,a_1),d(p,a_2),\dots,d(p,a_n)\}$$

alınırsa $\eta<\varepsilon_0$ dır ve

$$(B(p,\eta)\setminus\{p\})\cap A=\{x\in X \mid 0<d(p,x)<\eta \wedge x\in A\}=\emptyset$$

olur, çünkü her $i=1,2,\dots,n$ için $d(p,a_i)\geq\eta$ dır.

Buna göre $p\notin A'$ çelişkisi oluşur.

5- $(X,d_1),(Y,d_2)$ iki metrik uzay ve $f:X\to Y$, 1-1 ve örten, yine her $x,y\in X$ için

$$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y))$$

verilmiş.

$\forall\varepsilon>0$ için $\delta:=\varepsilon$ seçilirse

$$d_1(x,y)<\delta \wedge x,y\in X \Rightarrow d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y)<\delta=\varepsilon$$

olur.

6- (X, d_1), (Y, d_2) iki metrik uzay, $Z = X \times Y$ üzerinde

$$m(z_1, z_2) = \sqrt{(d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2}$$

fonksiyonunun metrik olduğunu gösterelim:

M1) $m(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow d_1(x_1, x_2) = 0 \wedge d_2(y_1, y_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

$\Leftrightarrow z_1 = (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = z_2$.

M2) $m(z_1, z_2) = \left((d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2\right)^{1/2}$

$= \left((d_1(x_2, x_1))^2 + (d_2(y_2, y_1))^2\right)^{1/2}$

$= m(z_2, z_1)$.

M3) $m(z_1, z_2) = \left((d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2\right)^{1/2}$

$\leq \left((d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2))^2\right)^{1/2}$

$\leq \left((d_1(x_1, x_3))^2 + (d_2(y_1, y_3))^2\right)^{1/2}$

Minkowski eşitsizliği kullanıldı $+ \left((d_1(x_2, x_3))^2 + (d_2(y_3, y_2))^2\right)^{1/2}$

$= m(z_1, z_3) + m(z_3, z_2))$.

Burada $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ ve $z_3 = (x_3, y_3) \in Z$ dir.

$z_n = (x_n, y_n) \xrightarrow{m} z = (x, y) \Leftrightarrow m(z_n, z) = \left((d_1(x_n, x))^2 + (d_2(y_n, y))^2\right)^{1/2} \to 0$

$\Leftrightarrow d_1(x_n, x) \to 0 \wedge d_2(y_n, y) \to 0$

$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_1} x \wedge y_n \xrightarrow{d_2} y$.